Isoquantenkäse!!!

Gegeben sind zwei Einsatzfaktoren x und y. Die Preise betragen P(x)=8 und P(y)=2. Anschaulich ist x teurer als y.

Meine Gesamtkosten sind in jedem Fall:

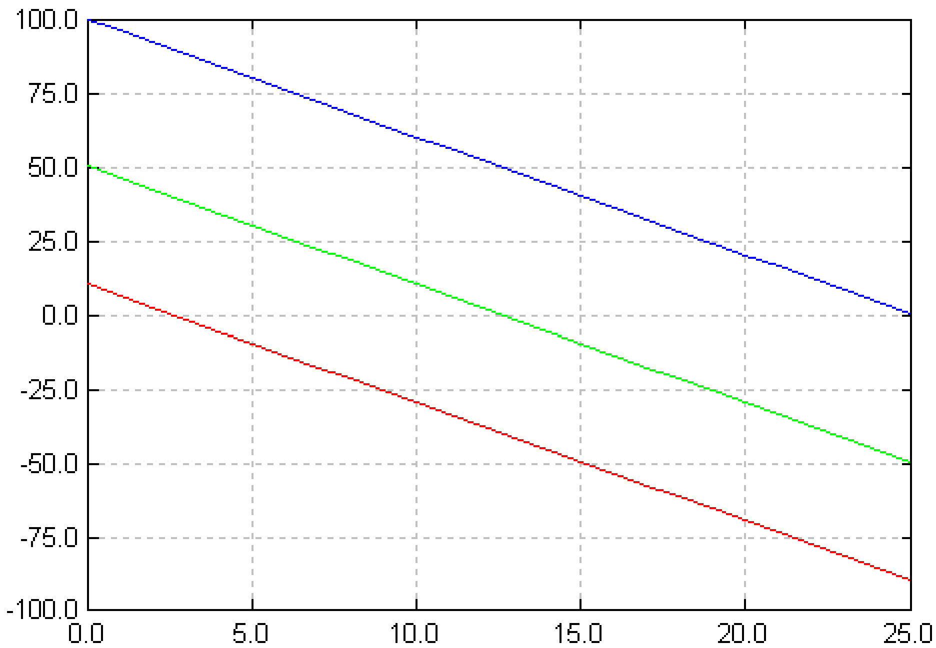
Gesamtkosten = Preis(x) * Menge(x) + Preis(y) * Menge(y)

Völlig unabhängig vom Mischverhältnis. Ich kann daraus eine Gerade ermitteln:

C = px * x + py * y ⇨ (C – px * x) / py = y ⇨ **y = C/py – px/py * x**

Diese Gerade nennt man die **Isokostengerade**, weil sie angibt, welche möglichen Mischungsverhältnisse ich *bei gegebenen Kosten* haben kann.

Beispiel. Angenommen, ich möchte 100 EUR investieren. Dann ergibt sich eine Gerade mit der Definition 100/2 – 8/2 * x. Angenommen, ich möchte 1 EUR investieren. Dann ändert sich nur der Ausgangswert, nicht aber die Steigung.



Die oberste Kurve gibt an, was ich beim Einsatz von 200 EUR für mögliche Mischverhältnisse habe. Ich kann z.b. gar kein x und nur y verwenden, dann kann ich 200 y einsetzen. Oder, ich kann gar kein y und nur x verwenden, dann kann ich 25 x einsetzen.

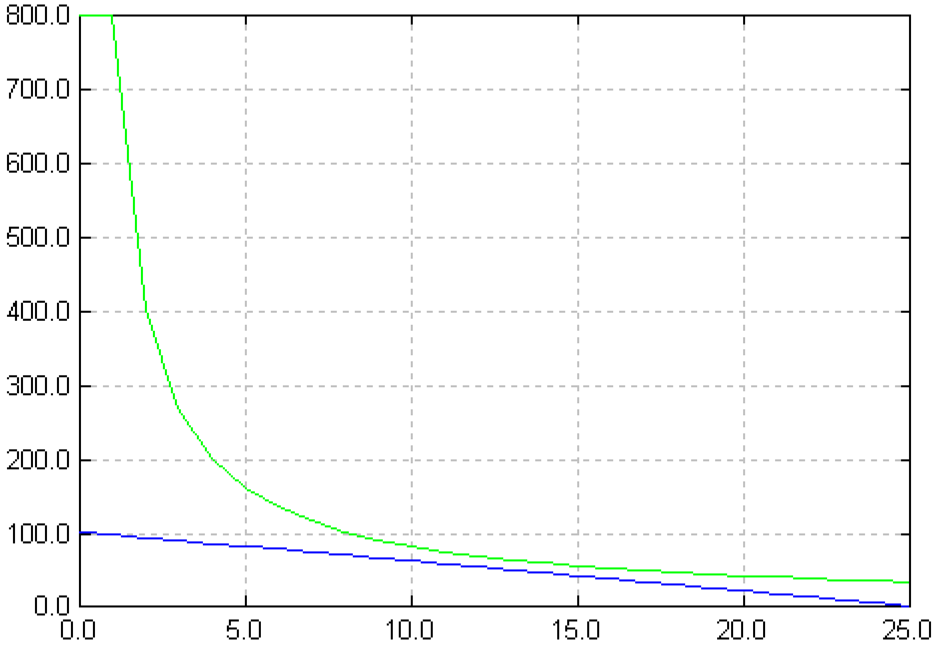
Also, **Isokostengerade = mögliche Mischungsverhältnisse bei gegebenem Einsatz**.

Anschaulich ist auch klar: je höher ich die Gerade verschiebe, desto höher meine Kosten.

Jetzt gibt es eine (bei uns einfach gegebene) **Produktionsfunktion**, die so ausschaut:

Produkt = x*y

Diese Funktion kann man trivial umformen in y = Produkt/x und hinmalen:



Im Beispiel habe ich die Funktion 800/x eingezeichnet. Was bedeutet das?

1. Ich möchte einen gegebenen Output – *eine gegebene Menge, daher der Begriff* **Isoquante** – erhalten, hier: 800.
2. Wenn ich 10 x einsetze, benötige ich 80 y, wenn ich nur 1 x einsetze, benötige ich 800 y, usw.

Also, **Isoquantenfunktion = mögliche Mischverhältnisse bei gegebener Menge**

Der Graph erklärt so auch die **abnehmende Grenzrate der Substitution**: Um die Menge der x zu verringern, brauche ich überproportional mehr y, wenn x klein genug ist. Umgekehrt: Um die Menge der y zu reduzieren, brauche ich überproportional viele x.

Es gibt zwei mögliche Optimierungsfragen:

1. Was sind die minimalen Kosten, die bei gegebenem Output notwendig sind?
2. Was ist der maximale Output, der mit gegebenen Kosten erreichbar ist?

Betrachten wir zuerst 1). Oben haben wir gesagt, eine Verschiebung der Isokostengerade nach oben oder unten bedeutet eine *Variierung der eingesetzten Kosten*. Wenn wir die Kosten minimieren wollen, müssen wir also die Gerade irgendwie verschieben. Wohin? Überhaupt mögliche Punkte müssen bei gegebenem Output wie oben definiert auf der Isoquantenfunktion liegen; ich muss also die Gerade so lange nach oben verschieben, bis sie die Isoquantenfunktion genau berührt. Das sind dann die minimalen Kosten.

Wenn ich die Isokostengerade an die Isoquantenfunktion verschieben will, dann muß die **Steigung der Isoquantenfunktion gleich der Steigung Isokostengerade sein.**

Die Steigung der Isokostengerade ist das Verhältnis der beiden Preise; die Steigung der

Isoquantenfunktion das Verhältnis der beiden partiellen Ableitungen. Deshalb also die Formel im Skript:

py/px = dY nach dy / dY nach dx

Diese Formel gibt **das optimale Mischungsverhältnis an**, nicht aber, welche Kosten ich dabei habe.

Beispiel: Unser gesuchter Output war 800. Ich muss untersuchen:

(1) Mögliche Faktorkombinationen bei fester Menge 800: y=800/x

(2) Mögliche Faktorkombinationen bei festem Betrag C: y=C/2 – 4x

Also

py/px = 2/8 = 4 = y/x ⇨ Das **optimale Mischungsverhältnis** ist 4 y je x.

Das nun gegebene Mischungsverhältnis kann ich in die Isoquantenfunktion einsetzen, ich erhalte:

$800/x = 4x$ ⇨ $800 = 4x^2$ ⇨ $200=x^2$ ⇨ x= 14.14... ⇨ y = 800/14.14 = 56.56..

Das benötigte Kapital ergibt sich trivial aus der ganz am Anfang angegebenen Gesamtkostenfunktion als

$\text{Gesamtkosten}_{\text{minimal}}$ = 14.14 * 8 + 56.56 * 2 = 226.27...

Stichprobe:

- Angenommen, ich nehme weniger x, etwa nur 10 x. Dann benötige ich für einen Output von 800 per Definition 800/10 = 80 y. Damit habe ich Kosten von 10*8+80*2=240 ⇨ ich habe also höhere Kosten
- Angenommen, ich nehme mehr x, etwa 20 ⇨ ich benötige nur 40 y ⇨ meine Kosten sind dann 20*8 + 40*2=240 ⇨ ich habe also ebenfalls höhere Kosten.

Wie kann man jetzt die 2. Optimierungsaufgabe, die Frage nach der Maximalen Menge lösen? Na klar: die maximale Menge ergibt sich ebenfalls aus dem optimalen Mischungsverhältnis; ich muss es nur in die andere Gleichung einsetzen.

Angenommen, ich möchte 1000 Geldeinheiten investieren. Es folgt:

y=1000/2 – 4x ⇨ 8x=500 ⇨ x=62.5 ⇨ y=4*x=250 ⇨ Output = x*y=15.625

Auch hier die Stichprobe:

- Weniger x, z.b. nur 10: ⇨ y=500-4*10=460 ⇨ Output = 460*10=4.600
- Mehr x, z.b. 100 ⇨ y=500-4*100=100 ⇨ Output = 100*100=10.000